

Семинар 6. Квазистационарные токи

Краткая теория

Электрический ток представляет собой направленное движение зарядов со средней скоростью $\langle \vec{V}_{n,0} \rangle$ и характеризуется двумя переменными: сила тока и плотность тока.

Определение – сила тока $I = \frac{dq}{dt}$ (отношение заряда, протекающего через всё сечение проводника за время dt , к этому интервалу времени).

Определение – плотность тока $\vec{j} = \frac{dq}{dtdS} \vec{e}_z$ (отношение заряда, протекающего через площадь dS , ориентированную перпендикулярно $\langle \vec{V}_{n,0} \rangle$ за время dt , к этому интервалу времени и dS).

Плотность электронного тока в проводнике может быть выражена через $\langle \vec{V}_{n,0} \rangle$: $\vec{j} = en \langle \vec{V}_{n,0} \rangle$.

Ток возникает в результате действия на заряды силы со стороны электрического поля. В любом физически бесконечно малом объёме проводника выполняется закон Ома:

$$\vec{j} = l \vec{E} = \frac{1}{r} \vec{E},$$

где l – проводимость вещества, r – его удельное сопротивление.

Сопротивлением проводника между двумя точками называется его геометрическая характеристика, зависящая также от его проводящих свойств (l), равная отношению разности потенциалов между этими точками к силе тока в проводнике:

$$R = \frac{U}{I} \text{ (закон Ома в интегральной форме)}$$

Закон Джоуля-Ленца. При протекании тока в проводнике выделяется тепловая мощность:

$$P_T \equiv \frac{dQ}{dt} = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

В дифференциальной форме закон Джоуля-Ленца определяет объёмную плотность тепловой мощности, выделяемой в объёме dV проводника:

$$w_T \equiv \frac{dQ}{dVdt} = l E^2$$

Здесь δQ – количество теплоты.

Типы задач

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. Потенциалы и токи. | 6.1, 6.12, 6.14, 6.16, 6.18, 6.19, 6.22, 6.23, 6.24 |
| 2. Граничные условия. | 6.2, 6.7 |
| 1. Сопротивление проводников. | 6.3, 6.4, 6.8, 6.9, 6.13, 6.15, 6.25 |
| 2. Тепловые потери. | 6.5, 6.6, 6.10, 6.11, 6.17, 6.20, 6.21 |

Задачи с решениями

6.1. Поскольку расстояние между шарами много больше их радиусов, то можно считать, что потенциал каждого шара определяется только его собственным зарядом:

$$\begin{cases} j_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{eR_1} \\ j_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{eR_2} \\ j_1 - j_2 = U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j_1 = -\frac{R_2}{R_1} \\ j_2 = -\frac{R_1}{R_2} \\ j_1 - j_2 = U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j_1 = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} \\ j_2 = \frac{-UR_1}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

6.2. Граничные условия для тангенсальных составляющих напряжённости электрического поля можно переписать через тангенсальные составляющие плотности тока. Кроме того, сила тока, «втекающего» в границу раздела сред равна силе тока, «вытекающего» из неё.

$$\begin{cases} E_{t1} = E_{t2} \\ I_{\text{через границу}} = \text{const} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j_{t1} / l_1 = j_{t2} / l_2 \\ j_{n1} \Delta S = j_{n2} \Delta S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j_1 l_2 \sin a_1 = j_2 l_1 \sin a_2 \\ j_1 \cos a_1 = j_2 \cos a_2 \end{cases} \Rightarrow l_2 \operatorname{tg} a_1 = l_1 \operatorname{tg} a_2$$

6.3. Ток протекает через поверхности полусфер различного радиуса r , концентрических с заданным в условии шаром. Причём сила тока везде одинакова. Остаётся лишь воспользоваться определением разности потенциалов и сопротивления:

$$\begin{cases} I = l_2 E_2 2\pi r^2 \\ I = l_1 E_1 2\pi r^2 \\ U = \int_a^b E_2 dr + \int_b^\infty E_1 dr \end{cases} \Rightarrow U = \frac{I}{2\pi l_2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{I}{2\pi l_1} \frac{1}{b} \Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{l_2 a} - \frac{1}{l_2 b} + \frac{1}{l_1 b} \right)$$

6.4 и 6.8. Разность потенциалов между сферами посчитаем, двигаясь по прямой, соединяющей их центры. Напряжённость поля в произвольной точке этой прямой является суперпозицией полей, создаваемых обоими шарами. Сила тока в задаче всюду одинакова и может быть рассчитана в непосредственной близости от поверхности, например, первого шара. Напряжённость вблизи поверхности первого шара определяется в основном лишь его зарядом.

$$\begin{cases} U = \int_{a_1}^{l-a_2} E(r) dr \\ E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{er^2} + \frac{q}{e(l-r)^2} \right] \\ I = l E(a_1) 2\pi a_1^2 \\ E(a_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{ea_1^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \frac{lq}{2e_0e} \\ E(r) = \frac{I}{2\pi l} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(l-r)^2} \right] \\ U = \frac{I}{2\pi l} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{l-r} \right) \Big|_{a_1}^{l-a_2} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{1}{2\pi l} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right)$$

6.5. С помощью закона Ома в дифференциальной форме и определения плотности тока можно связать напряжённость поля в произвольной точке изолятора с силой тока утечки. С другой стороны, по теореме Остроградского-Гаусса напряжённость поля в изоляторе определяется зарядом внутреннего провода. Пользуясь определением разности потенциалов находим сопротивление участка кабеля длины h . В итоге тепловая мощность оказывается пропорциональной проводимости изолятора.

$$\begin{cases} l E(r) 2\pi r h = I \\ e_0 e E(r) 2\pi r h = q \\ U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{I}{2\pi l h} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \frac{l q}{e_0 e} \\ R = \frac{1}{2\pi l h} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{cases} \Rightarrow P_T = I^2 R \sim l \Rightarrow \frac{P_{T1}}{P_{T2}} = \frac{l_1}{l_2}$$

6.6. Запишем граничное условие для нормальной компоненты вектора электрической индукции, разрыв которой как раз и задаёт поверхностную плотность свободных зарядов на границе раздела сред. Сила тока во всём образце одинакова, а разность потенциалов между обкладками конденсатора равна сумме падений напряжений на каждом участке.

$$\begin{cases} e_0 e_2 E_2 - e_0 e_1 E_1 = s \\ l_1 E_1 S = l_2 E_2 S \\ U_0 = E_1 d / 2 + E_2 d / 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_0 (e_2 E_2 - e_1 E_1) = s \\ E_2 = \frac{2U_0}{d} \frac{l_1}{l_1 + l_2} \\ E_1 = \frac{2U_0}{d} \frac{l_2}{l_1 + l_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{T1} = l_1 E_1^2 \frac{Sd}{2} = \frac{1}{l_1} \frac{2SU_0^2}{d} \left(\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} \right)^2 \\ s = \frac{2e_0 U_0 (l_1 e_2 - l_2 e_1)}{d(l_1 + l_2)} \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

6.9, 6.10, 6.12, 6.13, 6.17, 6.21, 6.22, 6.23.

Литература

Н.В. Нетребко, И.П. Николаев, М.С. Полякова, В.И. Шмальгаузен. Электричество и магнетизм. Практические занятия по физике для студентов-математиков. Часть III. Москва: Макс Пресс, 2006 г.